

Universita' degli Studi di Catania  
Corso di Laurea in Fisica  
Meccanica quantistica  
*Risoluzione numerica dell'equazione di  
Schrödinger*

## 1 Introduzione

L'equazione di Schrödinger è un'equazione differenziale alle derivate parziali per la cui risoluzione è necessario la maggior parte delle volte ricorrere a metodi numerici. Un interessante sistema fisico da studiare alla luce della meccanica quantistica e che richiede una risoluzione di tipo numerico è quello formato da una particella libera sottoposta al potenziale di Saxon-Woods:

(1)

Si osserva subito che si tratta un potenziale simmetrico rispetto all'origine, attrattivo, la cui profondità massima vale esattamente  $-V_0$ , la larghezza media in termini della coordinata spaziale vale  $2x_0$  e infine il parametro  $d$  (parametro di diffuseness) indica la pendenza del termine esponenziale. Questo potenziale si ritrova ad esempio nello studio delle interazioni nucleari, e volendomi riferire a un sistema fisico concreto (atomo di  $^{40}\text{Ca}$ ) pongo

$$\begin{aligned}x_0 &= 5 \text{ fm} \\d &= 0.5 \text{ fm} \\V_0 &= -40 \text{ MeV}.\end{aligned}$$

Si vede facilmente che al limite per  $d \rightarrow 0$  questo potenziale ne approssima uno ideale ma risolubile per via analitica, cioè quello relativo a una buca a pareti finite:

(2)

dunque può risultare molto interessante confrontare i risultati noti analiticamente con quanto invece calcolato numericamente.

In questo studio sono interessato solamente agli stati legati del sistema.

## 2 Metodo di Numerov

Il metodo qui utilizzato per la risoluzione numerica dell'equazione di Schrödinger è il metodo di Numerov, che in realtà consente più in generale di risolvere problemi del tipo

$$\{$$

In questo caso ovviamente

e l'incognita  $y$  è la funzione d'onda  $\psi$ .

L'idea di questo metodo consiste, dopo aver discretizzato il dominio di tutte le funzioni, nel calcolare, a partire dallo sviluppo in serie di Taylor arrestato al quinto ordine della  $y$ , il valore di  $y_{n+1}$  e  $y_{n-1}$  in funzione di  $y''$  e  $y^{IV}$ . Da queste, dopo semplici passaggi algebrici, si ricava che

essendo

Dunque l'algoritmo partendo dai valori noti di  $y_0$  e  $y'_0$  calcola in modo iterativo la funzione  $y$ . Il parametro che resta da definire è l'energia. Il programma la calcola col metodo di shooting in un intervallo compreso tra  $-V_0$  e 0 scegliendo il valore per cui la  $y$  abbia all'interno della buca di potenziale il numero di nodi voluto dall'utente. Per scartare soluzioni fisicamente non accettabili l'algoritmo integra negli intervalli  $[0, x_c]$  e  $[x_c, x_{max}]$  (essendo  $x_c$  il punto in cui si ha lo zero di ascissa più elevata, ovvero il punto di inversione classica) imponendo che in  $x_c$  la  $y$  risulti continua e con derivata continua. Ad ogni step inoltre viene normalizzata la  $y$  calcolata.

## 3 Software utilizzato

Per effettuare la simulazione si è fatto uso di un programma scritto in linguaggio `fortran 77`. Il programma tratta tutte le variabili numeriche come reali in doppia precisione. Quando viene mandato in esecuzione chiede come input innanzitutto che l'utente assegni il valore massimo della coordinata spaziale (la  $x$ ). Visti i parametri inseriti nel potenziale è opportuno scegliere  $x_{max} = 10$ . Dato che il potenziale è in tutti i casi simmetrico rispetto all'origine, basterà effettuare tutti i calcoli solo per le  $x$  positive: la  $\psi$  corrispondente ai valori negativi della coordinata si otterranno facilmente per simmetria alla fine. Ovviamente il programma discretizza l'intervallo di definizione di tutte le funzioni: per questo subito dopo bisogna assegnare il numero di punti della griglia. Il programma

prevede di valutare tutte le funzioni in 4000 punti. In questo caso il passo di discretizzazione risulta  $10/4000 = 0.0025$ , valore che è sembrato accettabile, e che dunque non è stato modificato. A questo punto il programma è pronto per calcolare l'incognita  $\psi$  attraverso il metodo descritto sinteticamente nel precedente paragrafo. Durante il calcolo ad ogni step viene visualizzato su schermo il valore corrente di energia: evidentemente l'ultimo è il valore finale calcolato per l'autovalore. Inoltre il programma genera un file di output in cui vengono scritti per ogni valore della  $x$  (in tutto si tratta di 8000 valori) i valori della relative  $\psi$ , della probabilità  $P = |\psi|^2$  e del potenziale utilizzato. Per analizzare i dati si è utilizzato un software di grafica (`gnuplot`) con il quale sono anche stati realizzati tutti i grafici riportati in questa tesina.

## 4 Potenziale di Saxon-Woods

Per prima cosa ho studiato il potenziale di Saxon-Woods con i parametri dati precedentemente. In particolare ho calcolato lo spettro dell'energia e in corrispondenza di ogni autovalore le relative funzioni d'onda  $\psi$  e distribuzioni di probabilità. Per far questo ho eseguito il programma ripetutamente imponendo che la soluzione calcolata avesse un numero di nodi all'interno del potenziale incrementato di un'unità ad ogni ciclo, a partire da  $n = 0$  (cui corrisponde lo stato fondamentale del sistema). Il procedimento non è però iterabile infinite volte: il valore dell'ultimo autovalore calcolato cresce all'aumentare dell'eccitazione del sistema, fino a  $n = 31$ , caso in cui l'ultimo autovalore si ha per  $E = -0.33400373$ . Il calcolo per  $n = 32$  non è possibile, in quanto l'algoritmo si blocca prima della conclusione perchè determina soluzioni non accettabili. Dunque il numero di autovalori possibili è finito e varia nel discreto (come era da prevedere trattandosi di una buca di potenziale attrattiva). In fig. 1 è graficato il potenziale con tutti gli autovalori calcolati.

Figura 1: Spettro dell'energia

La cosa più interessante da analizzare in prima battuta è come varia la larghezza dei vari livelli. Ho dunque graficato (vd. fig. 2) il valore di  $E_n - E_{n-1}$  al variare di  $n$ . Come si può vedere l'andamento è alquanto strano: si nota un addensamento dei vari livelli energetici sia all'inizio, per  $n$  piccoli, ovvero in riferimento ai primi autovalori, sia per  $n$  grandi, ovvero per stati molto eccitati. Questo comportamento è inaspettato e può essere interessante cercare di analizzarlo. Ritengo che il modo migliore sia confrontare questo aspetto con quanto ricavabile a proposito del potenziale (2), di cui si conosce la soluzione analitica. Dunque rimando quest'analisi al § 7.

Altra considerazione che invece è già possibile fare è il confronto tra la "probabilità" classica e quella calcolata a partire dalla funzione d'onda per il massimo

Figura 2:  $E_n - E_{n-1}$  al variare di  $n$ 

stato d'eccitazione, quando i due risultati dovrebbero convergere per il principio di corrispondenza. Classicamente è possibile infatti definire come probabilità la funzione

supponendo cioè che la particella abbia all'interno della buca un moto rettilineo uniforme e pertanto avendo posto  $x = vt$  e  $T = \frac{L}{v}$ . Ovviamente ciò non vale in prossimità dei bordi del potenziale, quando la particella inverte il suo moto che dunque non è più descrivibile in questi termini. In questa trattazione non considero, per semplicità, il comportamento in questi punti. Il valore di  $L$  per questo potenziale non è costante ma dipende dal valore dell'energia. In particolare risulta:

Per  $E =$  (l'ultimo autovalore calcolato) si ha  $L =$  . In fig. 3 sono graficate sovrapposte la distribuzione di probabilità secondo la meccanica quantistica e la probabilità classica così definita, in modo da poterle confrontare. Come

Figura 3: Probabilità classica e quantistica

detto non va tenuto conto di cosa accade agli estremi del potenziale: la probabilità "classica" qui non assume più il valore prima calcolato, e il diverso comportamento si nota anche quantisticamente visto che in questi due punti la distribuzione di probabilità ha un picco molto più alto che altrove. E' possibile fare invece le considerazioni più importanti nella parte centrale della buca: qui si vede che da un punto di vista classico il tempo di permanenza della particella in ogni  $dq$  è costante. Quantisticamente permane certamente l'andamento periodico, vista la forma della  $\psi$ , ma abbiamo comunque 31 punti in cui la probabilità di trovare la particella è nulla, e nello spazio restante la probabilità varia con continuità: come si osserva anche solo graficamente gli zeri sono sempre più stretti così da far apparire i valori massimi delle singole curve sempre più vicini. Chiaramente al limite potremmo approssimare questa distribuzione con una retta, ritrovando cioè un valore costante. Anche in questo sistema allora è possibile verificare che per stati molto eccitati il comportamento quantistico

tende alla teoria classica. Unico problema è il valore di questa costante: da una analisi grafica i due valori sembrano non coincidere (entrambe le probabilità sono ovviamente normalizzate), ma ritengo che ciò possa essere spiegato col fatto che non si è considerato il comportamento in prossimità dei punti di inversione del moto.

## 5 Studio del potenziale per $d \rightarrow 0$

La parte più interessante di questa esercitazione consiste nel variare il parametro di diffuseness  $d$  all'interno del potenziale di Saxon-Woods. Il primo problema riguarda la leggibilità dei risultati: mantenendo  $V_0 = -40$  dovrei calcolare di volta in volta circa 30 autovalori e poi confrontarli tutti. Inoltre i grafici realizzati non sarebbero affatto chiari. Per un'analisi qualitativa del problema basta studiare pochi (i primi) autovalori e fare tutte le dovute considerazioni riferendosi a questi. In questo modo anche i grafici risulteranno più leggibili. Per questi motivi ho ritenuto opportuno porre da questo momento in poi  $V_0 = -1$ : qualitativamente i risultati sono gli stessi di prima, ma il sistema ammetterà solo pochi autovalori, facilitando così tutti i conti<sup>1</sup>.

Da un punto di vista numerico porre un parametro tendente a zero vuol dire considerarlo piccolo rispetto alle altre grandezze in gioco. Nella simulazione già effettuata avevo posto  $d = 0.5$ . Per poter valutare l'incidenza di questo parametro all'interno del potenziale ho scelto di eseguire il programma ponendo  $d = 0.1$  e poi  $d = 0.001$ . In fig. 4 ho graficato i vari potenziali corrispondenti ai questi valori di  $d$ . E' evidente che nell'ultimo caso da un punto di vista numerico il potenziale è perfettamente sovrapponibile a quello di una buca a pareti finite.

Figura 4: Confronto tra i potenziali al variare di  $d$

Per effettuare questo studio la prima cosa che ho fatto è il calcolo dello spettro dell'energia con i tre diversi valori di  $d$ : un confronto diretto tra i valori calcolati può essere molto indicativo. Questi sono riportati nelle tabb. 1, 2 e 3.

In riferimento allo spettro per  $d = 0.5$ , può essere utile in particolare osservare il grafico delle funzioni d'onda e delle relative distribuzioni di probabilità (vd. figg. 5 e 6). Per quanto riguarda le funzioni d'onda, osservo che queste decrescono molto rapidamente a zero per i valori della  $x$  esterni alla buca di potenziale (e dunque esiste una seppur piccola probabilità di trovare la particella anche qui), mentre all'interno hanno un andamento tipicamente periodico; si osservi in particolar modo la corrispondenza tra il numero di nodi imposto e il numero di zeri che le varie funzioni ammettono all'interno della buca stes-

<sup>1</sup>Questa affermazione è facilmente giustificabile da un punto di vista qualitativo e intuitivo. Nel § 7 ho ricavato una dimostrazione più rigorosa per cui sono sicuro di non ledere la generalità dell'analisi.

livello di eccitazione	autovalore dell'energia

Tabella 1: Spettro dell'energia per  $d = 0.5$

livello di eccitazione	autovalore dell'energia

Tabella 2: Spettro dell'energia per  $d = 0.1$

livello di eccitazione	autovalore dell'energia

Tabella 3: Spettro dell'energia per  $d = 0.001$

Figura 5: Confronto tra le funzioni d'onda per il potenziale (1)

Figura 6: Confronto tra le distribuzioni di probabilità per il potenziale (1)

sa. Questo comportamento assicura che sono stati calcolati degli stati legati e che esiste una corrispondenza con il potenziale (2). Ovviamente non avendo a

disposizione la soluzione analitica non è possibile però dire l'esatta espressione funzionale di queste curve.

Tornando invece al problema generale, la cosa che appare interessante confrontare è la differenza tra gli autovalori ora calcolati e quelli calcolabili nel caso in cui la particella è soggetta al potenziale (2). In particolare si potrà capire innanzitutto di quanto differiscano tra loro, ma soprattutto si potrà mettere in evidenza l'influenza del parametro  $d$ , che è poi quanto voglio capire. Per far questo è necessario procedere a uno studio analogo a quello fatto finora anche per il potenziale (2).

## 6 Potenziale relativo a una buca a pareti finite

Sono dunque passato allo studio del potenziale (2), risolvibile analiticamente. Si può calcolare facilmente che per una buca di potenziale come questa risulta

essendo

Le costanti di integrazione si determinano imponendo che la  $\psi$  sia continua e con derivata continua  $\forall x$ . Per determinare invece gli autovalori dell'energia si deve risolvere l'equazione

$$\tan(\tilde{k}x_0 - \frac{n\pi}{2}) = \frac{\tilde{k}}{k} \quad (3)$$

che si ottiene dopo semplici passaggi algebrici.

Anche stavolta la prima cosa fatta è il calcolo dello spettro dell'energia (mantenendo  $V_0 = -1$ ). I valori numerici ottenuti sono scritti nella tab. 4. Si noti come

livello di eccitazione	autovalore dell'energia

Tabella 4: Spettro dell'energia con il potenziale (2)

è stato possibile calcolare solo quattro autovalori di energia prima che l'algoritmo si bloccasse. Ancora una conferma del fatto che in questo tipo di potenziali il numero di stati energetici possibili è finito. Evidentemente se avessi continuato

Figura 7: Confronto tra le funzioni d'onda per il potenziale (2)

Figura 8: Confronto tra le distribuzioni di probabilità per il potenziale (2)

a valutare  $V_0 = -40$  avrei avuto più autovalori, ma sempre in numero limitato. Le funzioni d'onda e le distribuzioni di probabilità relative a questi autovalori sono graficate rispettivamente in fig. 7 e fig. 8.

Analogamente a quanto già fatto è interessante valutare come varia la differenza tra gli autovalori dell'energia. Per poter fare questo, anche se si conosce la forma analitica della funzione  $\psi$ , si perviene però all'equazione (3) che definisce in modo implicito la dipendenza degli autovalori  $E_n$  da  $n$ . Bisogna allora ricorrere necessariamente a metodi numerici per conoscere questa dipendenza. Ciò che immagino di fare è scrivere la (3) nella forma

(4)

Graficando al variare di  $E$  le funzioni a primo e secondo membro, i punti di intersezione tra le curve sono gli zeri della (3) e dunque rappresentano gli autovalori dell'energia per questo sistema. Il grafico ottenuto è in fig. 9, ove in rosso è riportata la funzione a primo membro, in verde la funzione a secondo membro al variare di  $n$  (intero positivo)<sup>2</sup>. Con questo metodo risulta difficile

Figura 9: Risoluzione grafica dell'eq. (4)

conoscere il valore degli zeri trovati, ma si può osservare anche solo graficamente

---

<sup>2</sup>Per questo tipo di risoluzione, cfr. Messiah, *Quantum Mechanics*, North Holland, 1964.



che troviamo, data la forma stessa della funzione arctan, che in prossimità degli estremi dell'intervallo di definizione ammette tangente sempre più "verticale", un'addensamento delle intersezioni tra le due curve, e quindi un numero maggiore di autovalori a parità di intervallo di energia (riportata in ascisse), nella parte iniziale e nella parte finale, quando  $E$  assume valori vicini a  $-40$  e  $0$  rispettivamente. Invece nella parte centrale del grafico si osserva un aumento della distanza tra due radici consecutive. Questo discorso si collega perfettamente con quanto trovato numericamente a proposito del potenziale di Saxon-Woods. Ulteriori considerazioni a questo proposito saranno fatte nel § 7.

## 7 Confronto tra i due potenziali

Lo studio finora realizzato serve a confrontare il potenziale di Saxon-Woods e quello relativo alla buca di potenziale a pareti finite.

La cosa più immediata da fare è calcolare la differenza tra gli autovalori dell'energia per il potenziale (1) al variare di  $d$  e quelli relativi al potenziale (2). Ho realizzato questi calcoli, e i risultati ottenuti sono trascritti nella tab. 5. Si vede

livello di eccitazione	$d = 0.5$	$d = 0.1$	$d = 0.001$

Tabella 5: Differenza dello spettro dei potenziali (1) al variare di  $d$  e (2)

in modo molto chiaro che al diminuire del parametro  $d$  gli autovalori convergono a quelli calcolati tramite il potenziale (2); anzi per  $d = 0.01$  lo scostamento tra i due valori tende praticamente alla precisione massima consentita dal calcolatore (tutti questi dati sono stati rappresentati in semplice precisione), il che da un punto di vista numerico equivale a dire che i due valori praticamente coincidono. Va poi notato che in realtà anche per  $d = 0.5$  le differenze sono davvero minime: i due valori coincidono già fino alla seconda cifra decimale.

Per poter visualizzare graficamente questo comportamento e per poter fare poi ulteriori considerazioni ho rieseguito il programma variando più volte (13 in tutto) il parametro  $d$ , sempre per valori compresi all'interno dell'intervallo tra  $0.5$  e  $0.001$ ; prendendo in considerazione stavolta solo l'autovalore relativo allo stato fondamentale ho calcolato la differenza tra ciascuno di questi e l'autovalore relativo allo stato fondamentale del sistema soggetto al potenziale (2). Riportando in ascisse i valori di  $d$  e in ordinata il risultato di questa operazione si capisce in modo molto evidente il ruolo di questo parametro (vd. fig. 10): la curva per  $d \rightarrow 0$  converge a  $0$ , ovvero il valore numerico degli autovalori nei due casi tende a coincidere.

Una seconda linea di analisi per questo confronto fa riferimento alle autofunzioni: ho ritenuto opportuno allora di studiare solo l'autofunzione relativa allo stato fondamentale e di calcolare per ogni punto della griglia la differenza tra il valore della  $\psi$  trovata col potenziale (1) (ovviamente ancora una volta al variare del parametro  $d$ ) e col potenziale (2). I risultati ottenuti sono stati graficati in

Figura 10: Differenza tra l'autovalore dello stato fondamentale al variare di  $d$

fig. 11. Le osservazioni da fare su quanto trovato sono molteplici. Balza subito

Figura 11: Differenza tra le autofunzioni dello stato fondamentale

agli occhi che per  $d = 0.001$  la distanza tra le due autofunzioni è praticamente sempre nulla: ciò ancora una volta a riprova del fatto che a questo punto i due sistemi praticamente sono equivalenti. Per gli altri valori di  $d$  accade invece qualcosa di strano. Ricordando che questo confronto è stato fatto per l'autofunzione relativa allo stato fondamentale, che non presenta nodi all'interno della buca, si osserva che in entrambi i casi vi sono due punti ben determinati in cui le autofunzioni coincidono ( $x = 2$  e  $x = -2$ ). Altrove invece la differenza tra le autofunzioni varia in modo continuo. Si calcola molto facilmente che il massimo della differenza si ha per  $x = -5$ ,  $x = 0$ ,  $x = 5$ : agli estremi e al centro del potenziale (nel primo e nell'ultimo caso assume un valore maggiore l'autofunzione relativa al potenziale (2), mentre per  $x = 0$  quella relativa al potenziale (1)). Il fatto che agli estremi il comportamento dei due sistemi sia differente è facilmente spiegabile se si pensa che il potenziale (2) ha in questi punti una discontinuità, mentre il potenziale (1) presenta ai bordi un andamento più smussato e comunque continuo. E' plausibile allora che questa diversa forma del potenziale generi un diverso comportamento delle  $\psi$ , che comunque devono risultare continue e con derivata continua. Non riesco invece a trovare giustificazione del fatto che i due sistemi ammettano anche nel punto centrale della buca un valore così diverso della autofunzione. Allo stesso modo non riesco a trovare spiegazione del fatto che in due punti, e proprio in quelli, le due autofunzioni praticamente coincidono. Osservo infine che lo stesso comportamento si ha per  $d = 0.5$  e per  $d = 0.1$ ; ciò che cambia ovviamente è il valore della differenza, che diminuisce al diminuire di  $d$ .

Una terza linea di confronto può essere seguita infine richiamando quanto già detto nel § 2 e § 4: ho già infatti graficato nel caso del potenziale di Saxon-Woods la funzione  $E_n - E_{n-1}$  al variare di  $n$ , ovviamente calcolata per via numerica. Per quanto riguarda invece il potenziale relativo alla buca ideale, ho fatto un'analisi grafica di questo aspetto, e comunque sono pervenuto a risultati concordanti. Voglio ora graficare ancora una volta la quantità  $E_n - E_{n-1}$  ma

stavolta al variare di  $E_n$ , in riferimento al potenziale (1). La curva ottenuta è quella di fig. 12. Questa relazione può essere studiata facilmente e in modo

Figura 12:  $E_n - E_{n-1}$  al variare di E

più rigoroso di quanto fatto prima anche nel potenziale (2). Osservo infatti che passando idealmente<sup>3</sup> al limite la quantità  $E_n - E_{n-1}$  può essere considerata come un'approssimazione numerica di  $\frac{dE}{dn}$ , funzione della variabile E. Nel caso della buca ideale sappiamo che analiticamente si perviene all'equazione (4) che definisce implicitamente una funzione delle variabili E e n. Supponendo che tutte le ipotesi siano soddisfatte, posso applicare il teorema di U. Dini per ricavare un'espressione proprio per la nostra quantità. Si ha infatti:

posto

Il grafico della funzione  $\frac{dE}{dn}$  ora calcolata è riportato in fig. 13. Per poter effettuare il grafico, dato che non sono interessato in questa sede a un'esatta determinazione numerica, ho posto per semplicità  $c = 1$ : ciò che sarà valutato è dunque solo l'andamento della funzione. Risulta evidente il fatto che le due

Figura 13: Grafico di  $\frac{dE}{dn}$

curve hanno praticamente lo stesso comportamento, ovvero anche nel caso di un sistema soggetto al potenziale (2) gli autovalori dell'energia sono disposti in modo tale da addensarsi in prossimità del fondo e degli estremi della buca, che

<sup>3</sup>In realtà per poter fare ciò bisogna considerare la variabile n continua e reale. Ciò ovviamente non è vero, in quanto  $n \in \mathbb{N}$ . Questa però è una buona approssimazione per stati molto eccitati, e comunque basta considerare la funzione solo per i valori interi di n per ritrovare una piena corrispondenza col fatto fisico.

poi è quanto riscontrato numericamente per un sistema soggetto al potenziale di Saxon-Woods. Inoltre appare interessante ricordare che tale comportamento è del tutto indipendente dal valore di  $d$ , parametro che non compare in nessuna delle relazioni utilizzate in questa sede.

A questo punto può essere interessante attribuire un significato fisico alla quantità che qui è stata studiata,  $\frac{dE}{dn}$ . Si può infatti osservare che il suo inverso, ovvero  $\frac{dn}{dE}$  rappresenta la funzione comunemente denominata DOS (density of states) studiata in molti campi della fisica<sup>4</sup>. Una trattazione approfondita di tale aspetto ovviamente esula dagli scopi di questa tesina. Può essere interessante evidenziare però che nota la funzione DOS, si può conoscere il numero di stati dell'energia possibili all'interno della buca:

e in questo caso dunque risulta:

Si può mettere in evidenza in particolare la dipendenza da  $V_0$ : più profonda è la buca, più livelli energetici sono permessi al sistema (cosa peraltro data senza rigorosa giustificazione nel momento in cui, per semplicità di calcolo, ho studiato il sistema per  $V_0 = -1$ , aspettandomi di non ledere la discussione qualitativa del problema). Ma, ricordando la definizione del parametro  $c$ , si è ricavata pure una dipendenza lineare da  $x_0$ : maggiore è la larghezza della buca, più autovalori sono permessi. Questo aspetto non è stato finora riscontrato dato che il parametro  $x_0$  è stato mantenuto fisso. Ho però effettuato una verifica, di cui non riporto i risultati dettagliati, ma con la quale si può verificare che anche per un sistema soggetto al potenziale di Saxon-Woods resta valida questa dipendenza. Ciò come ulteriore riprova della somiglianza tra i due potenziali.

## 8 Considerazioni finali

Questa simulazione ha permesso, in conclusione, di poter studiare in modo sufficientemente dettagliato le proprietà quantistiche di un importante potenziale, quello di Saxon-Woods. Si è potuto inoltre capire in modo molto chiaro il fatto che molte delle proprietà (non solo da un punto di vista qualitativo) di un sistema di una particella soggetta a questo potenziale possono essere facilmente studiate per via analitica supponendo che la particella sia sottoposta a una buca di potenziale a pareti finite: lo studio da un punto di vista teorico si semplifica di molto, e si hanno risultati fisicamente consistenti.

---

<sup>4</sup>In particolare si studia che una buca di potenziale a pareti finite, come quelle trattate in questa tesina, può essere considerata come prima approssimazione del potenziale cui è soggetto ad esempio un gas di elettroni in un metallo.

**Indice**

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metodo di Numerov</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Software utilizzato</b>	<b>2</b>
<b>4</b>	<b>Potenziale di Saxon-Woods</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Studio del potenziale per <math>d \rightarrow 0</math></b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Potenziale relativo a una buca a pareti finite</b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Confronto tra i due potenziali</b>	<b>9</b>
<b>8</b>	<b>Considerazioni finali</b>	<b>12</b>