

Università degli studi di Catania
Corso di laurea in fisica

Esame di Laboratorio di Fisica I

Tesina sulla prova pratica di laboratorio
realizzata il 02/07/2002
da

Esperienza: Ago di Maxwell

§ Introduzione teorica e descrittiva

Descrizione dell' apparato

L'ago di Maxwell è costituito da una base fornita di appositi regolatori in modo da poterla mantenere sempre perfettamente ortogonale al piano d'appoggio e da un'asta portante all'estremità un filo di lunghezza regolabile tramite una vite. Il filo tiene un cilindro cavo costruito in modo tale da poter contenere al suo interno fino a quattro cilindretti (in questo caso due di plastica e due di ottone) la cui disposizione può essere variata dall'operatore.

L'apparecchio è completato da un cronometro munito di fotocellule in grado anche di contare il numero di oscillazioni che il cilindro stesso compie.

Scopo dell' esperienza

Lo scopo dell' esperienza è quello di ottenere una misura quanto più precisa possibile del *modulo di scorrimento* o *coefficiente di Lamè* del filo presente nell' apparecchio e di dimostrare che questo è una caratteristica del filo indipendente dalla sua lunghezza.

Descrizione teorica dell' esperienza

Applicando sul filo di dimensioni l e r un momento d'inerzia τ è noto che si provoca una torsione del filo stesso. Tra i due fenomeni esiste una relazione di proporzionalità diretta

definito K *modulo di torsione* e risulta:

essendo G il *modulo di scorrimento* del filo, che qui si vuole calcolare.

Se si esegue l'esperienza in modo da porre attenzione al fatto che il moto avvenga lungo un solo asse si può certamente scrivere

dove il segno meno è giustificato dal fatto che il momento che noi applichiamo dall'esterno è evidentemente opposto in verso al senso di rotazione del cilindro stesso.

Sostituendo il valore di τ così ottenuto nella relazione contenente φ si ha:

relazione che rappresenta un'equazione differenziale omogenea del secondo ordine. Si osservi il fatto che questa equazione rappresenta anche la legge oraria di un moto armonico, risultato in accordo con il fatto sperimentale che una volta lasciato libero il cilindro esso intraprende un moto armonico di oscillazione. Vogliamo ora trovare una relazione tra K (e quindi G) e le grandezze misurabili di questo moto: la grandezza più facilmente accessibile è il periodo di oscillazione, e applicando la teoria sul moto armonico sappiamo che:

Risolvendo rispetto a k :

La relazione così ottenuta contiene in definitiva tutte grandezze misurabili, tranne il valore del momento d'inerzia. A questo proposito si esegua prima l'esperienza ponendo i cilindretti interni nella configurazione 1, cioè i due di plastica all'esterno, i due di ottone all'interno:

Si otterrà così un determinato valore di T :

Si dispongano ora i cilindretti ponendo quelli di ottone all'esterno, quelli di plastica all'interno (configurazione 2):

Si misuri ora il nuovo periodo di oscillazione, che ovviamente sarà diverso perché diverso è il momento di inerzia creato dai cilindretti a causa della diversa disposizione delle masse. Si ottiene stavolta:

Calcolando $T_2^2 - T_1^2$ risulta:

Si osservi che poiché i cilindretti di ottone saranno certamente più pesanti di quelli in plastica, il momento di inerzia sarà maggiore nella seconda esperienza. Viste le posizioni fatte deve essere $\Delta I > 0$ e dunque dovrà sperimentalmente risultare $T_2 > T_1$.

Detto questo, rimane da calcolare ΔI . Ricorrendo al teorema di Huyghens-Steiner, detto I_0 il momento d'inerzia del cilindro cavo, I_{ott} quello relativo all'ottone e I_{pl} quello relativo alla plastica, risulta, riferendosi alla configurazione 1:

mentre con riferimento alla configurazione 2:

da cui

Sostituendo ora il valore così trovato nella relazione di partenza, si ha:

da cui:

E' ormai immediato che:

relazione che consente di ricavare G facendo solo misure di lunghezza, massa e tempo e con una precisione abbastanza elevata.

Descrizione pratica dell'esperienza

Le prime operazioni riguardano la preparazione dello strumento: va infatti controllato in particolare che lo strumento sia esattamente perpendicolare al piano orizzontale tramite le apposite viti poste sulla base. Si passa poi ad effettuare tutte le misurazioni preliminari. Vanno infatti pesati tramite bilancia elettronica avente una precisione nell'ordine del decimo di grammo i cilindretti in plastica e in ottone. La loro dimensione (si tratta di cilindri retti) è utile che venga misurata attraverso il calibro, così da avere una sensibilità di misura pari a $1/20$ mm. Si assume che i quattro cilindretti abbiano le stesse dimensioni e che a parità di materiale abbiano anche la stessa massa. E' quindi necessario effettuare più misurazioni su ogni cilindretto ma soprattutto su tutti i cilindretti così da poter avere una misura che tenga conto anche di eventuali imperfezioni dei materiali. Successivamente si rileva la misura del raggio del filo. Ovviamente è più accessibile misurarne il diametro. Lo strumento più adatto in questo caso è certamente il palmer che ha una sensibilità di misura del centesimo di millimetro. In questo caso va tenuto conto del fatto che il filo non è vergine e che lo strumento stesso possiede una vite che potrebbe deformare sensibilmente la sezione dello stesso filo. Vanno allora effettuate molte misurazioni e sempre ad altezze diverse.

Effettuate queste operazioni preliminari, si passa all'esecuzione dell'esperienza vera e propria. Si fissa allora una lunghezza del filo, e si pongono i cilindretti all'interno del contenitore secondo la disposizione 1. Si posiziona lo starter fotoelettrico in modo che questo risulti allineato al cilindro quando esso si trova in posizione di equilibrio. A questo punto si applica al sistema un momento di inerzia spostando il cilindro di un angolo comunque non superiore a 90° . Infatti si è visto che la determinazione finale di G è rigorosamente indipendente dall'ampiezza dell'angolo di oscillazione ma angoli maggiori di un angolo retto potrebbero generare effetti di deformazione elastica. Dopo aver spostato il cilindro dalla posizione d'equilibrio si lascia libero il corpo che come visto inizia un'oscillazione di cui bisogna misurarne il periodo. Affinché l'esperienza sia la più vicina al modello teorico bisogna che il cilindro compia una pura oscillazione sul piano orizzontale senza altri dissipamenti. Circa la misurazione vera e propria va considerato il fatto che la durata di un'oscillazione non supera qualche secondo e in questo modo l'errore che si genera nei momenti di start e stop sarebbe troppo rilevante. D'altra parte va evitato di campionare il periodo su molte oscillazioni, perché a questo punto sarebbero gli effetti di smorzamento a prevalere. Appare ragionevole campionare il periodo su 10 oscillazioni. Effettuate molte esperienze di questa tipologia, si dispongano i cilindretti nella configurazione 2 e si ripeta l'esperienza misurando nuovamente con le stesse accortezze di prima il periodo di oscillazione.

Si riesce così a ottenere una prima misura di G calcolata sul filo nelle predette condizioni sperimentali. Si procederà poi a ripetere le stesse operazioni su diverse lunghezze del filo.

§ Dati sperimentali e loro elaborazione

Dati sperimentali

Visti gli strumenti adottati risulta certamente:

$$\Delta l = 0.002 \text{ m}$$

$$\Delta a = 0.00005 \text{ m}$$

$$\Delta m = 0.0001 \text{ Kg}$$

$$\Delta r = 0.00001 \text{ m}$$

$$\Delta T = 0.01 \text{ sec}$$

Misura della massa di ottone (in grammi)

$$103.1 \pm 0.1 \text{ [g]}$$

Misura della massa di plastica (in grammi)

$$18.2 \pm 0.1 \text{ [g]}$$

Misura della lunghezza dei cilindri (in centimetri)

$$2.576 \pm 0.021 \text{ [cm]}$$

Diametro del filo (in millimetri)

$$0.71 \pm 0.01 \text{ [mm]}$$

ESPERIENZA 1

Misura della lunghezza del filo (in centimetri)

$$74.0 \pm 0.2 \text{ [cm]}$$

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 2 (in secondi)

$$29.52 \pm 0.15 \text{ [sec]}$$

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 1 (in secondi)

$$22.77 \pm 0.56 \text{ [sec]}$$

$$22.78$$

ESPERIENZA 2

Misura della lunghezza del filo (in centimetri)

67.6 ± 0.2 [cm]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 2 (in secondi)

28.07 ± 0.01 [sec]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 1 (in secondi)

21.2 ± 0.01 [sec]

ESPERIENZA 3

Misura della lunghezza del filo (in centimetri)

60.3 ± 0.2 [cm]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 2 (in secondi)

25.81 ± 0.31 [sec]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 1 (in secondi)

20.10 ± 0.23 [sec]

ESPERIENZA 4

Misura della lunghezza del filo (in centimetri)

50.8 ± 0.2 [cm]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 2 (in secondi)

24.37 ± 0.01 [sec]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 1 (in secondi)

ESPERIENZA 5

Misura della lunghezza del filo (in centimetri)

34.9 ± 0.2 [cm]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 2 (in secondi)

20.05 ± 0.03 [sec]

Periodo di 10 oscillazioni nella configurazione 1 (in secondi)

15.13 ± 0.01 [sec]

Calcolo di G_{μ}

Si ha:

Esperienza 1 : $G_{\mu} = 7.47645 \cdot 10^{10}$ [Nw/m²] = $74.7645 \cdot 10^3$ [Nw/mm²]

Esperienza 2 : $G_{\mu} = 7.12186 \cdot 10^{10}$ [Nw/m²] = $71.2186 \cdot 10^3$ [Nw/mm²]

Esperienza 3 : $G_{\mu} = 8.20275 \cdot 10^{10}$ [Nw/m²] = $82.0275 \cdot 10^3$ [Nw/mm²]

Esperienza 4 : $G_{\mu} = 7.07435 \cdot 10^{10}$ [Nw/m²] = $70.7435 \cdot 10^3$ [Nw/mm²]

Esperienza 5 : $G_{\mu} = 7.19035 \cdot 10^{10}$ [Nw/m²] = $71.9035 \cdot 10^3$ [Nw/mm²]

Propagazione dell' errore massimo assoluto a priori

Si ha:

e allora (considerando come unità Nw/m^2):

$$\text{ESPERIENZA 1 : } \Delta G = 1.13078 \cdot 10^{10}$$

$$\text{ESPERIENZA 2 : } \Delta G = 1.075288 \cdot 10^{10}$$

$$\text{ESPERIENZA 3 : } \Delta G = 1.289937 \cdot 10^{10}$$

$$\text{ESPERIENZA 4 : } \Delta G = 1.105293 \cdot 10^{10}$$

$$\text{ESPERIENZA 5 : } \Delta G = 1.188527 \cdot 10^{10}$$

Covarianza

Per poter procedere nell'analisi dei dati è essenziale che tutte le grandezze misurate siano statisticamente indipendenti. Nell'ambito della statistica di Gauss si dimostra che questa evenienza implica il tendere a zero della funzione detta covarianza. In particolare in questa esperienza è naturale che le misure di m , a , r , siano tra loro indipendenti in quanto effettuate con strumenti diversi, in momenti diversi. Le uniche grandezze sulle quali una verifica appare opportuna sono le misure di lunghezza del filo relazionate con le misure dei due periodi rispettivamente e le misure dei diversi periodi nelle due configurazioni. A tal proposito secondo definizione si ottengono i seguenti risultati:

I risultati ottenuti sono molto soddisfacenti e permettono di poter applicare senza indugi la teoria della propagazione degli errori nei dati acquisiti dall'esperienza.

Propagazione dell'errore standard

Si ha:

Da cui (considerando come unità Nw/m^2):

$$\text{ESPERIENZA 1 : } \sigma G = 0.147366 \cdot 10^9$$

$$\text{ESPERIENZA 2 : } \sigma G = 0.107960 \cdot 10^9$$

$$\text{ESPERIENZA 3 : } \sigma G = 0.161740 \cdot 10^9$$

$$\text{ESPERIENZA 4 : } \sigma G = 0.124826 \cdot 10^9$$

$$\text{ESPERIENZA 5 : } \sigma G = 0.269865 \cdot 10^9$$

Risultati ottenuti

In conclusione si è ottenuto:

$$\text{ESPERIENZA 1 : } G = [10^{10} \text{ Nw/m}^2]$$

$$\text{ESPERIENZA 2 : } G = [10^{10} \text{ Nw/m}^2]$$

$$\text{ESPERIENZA 3 : } G = [10^{10} \text{ Nw/m}^2]$$

$$\text{ESPERIENZA 4 : } G = [10^{10} \text{ Nw/m}^2]$$

$$\text{ESPERIENZA 5 : } G = [10^{10} \text{ Nw/m}^2]$$

Curva di massima verosimiglianza

Si vuole ora costruire quella curva che meglio rappresenta l'andamento di questi dati sperimentali. Ci occupiamo ovviamente del caso in cui la distribuzione delle probabilità sia espressa dalla funzione di Gauss e in cui l'andamento della curva sia lineare.

Applicando allora formule note, si giunge al seguente risultato: la retta che meglio rappresenta l'andamento di G rispetto alla lunghezza del filo ha l'espressione

(si ponga come unità di misura dell'ascissa [m], dell'ordinata [10^{10} Nw/m^2]).

Nel grafico in appendice vengono riportati i dati ottenuti sperimentalmente e le tre rette che rappresentano la massima verosimiglianza dei dati, così da individuare la striscia di piano in cui si ha il 68.3% di probabilità, rifacendo la stessa esperienza con gli stessi materiali e nelle stesse condizioni, di trovare gli stessi risultati.

§ Conclusione

In conclusione, trascurando piccoli scostamenti, e in particolare quelli derivanti dalla presenza di un coefficiente angolare nella retta di massima verosimiglianza, si può affermare che il calcolo del *modulo di scorrimento* di un filo è indipendente dalle altre grandezze misurate e in particolare dalla lunghezza del filo coinvolto nell'esperienza; in particolare da un'analisi dell'equazione della retta ottenuta si evidenzia come il suo coefficiente angolare sia molto prossimo allo zero. D'altra parte il risultato teorico atteso è una retta esattamente parallela all'asse delle l ; in questo caso il leggero scostamento del risultato da questo modello può essere facilmente giustificato dalla presenza durante l'esperienza di errori casuali di difficile analisi. Questa affermazione è avvalorata dal fatto che il coefficiente angolare considerato insieme al suo errore assume valori compresi tra -3.03 e $+4.5$, intervallo che comprende lo zero.

Allora il valore di G calcolato risulta essere il valore dell'ordinata della retta. In particolare, trascurando piccoli scostamenti, si è calcolato che il filo presente nell'apparato usato risulta avere un modulo di scorrimento pari a

Tale valore è quello dell'ordinata della retta nel punto $l = 0$.

§ Bibliografia

- A. Strazzeri, Appunti del corso di *Laboratorio di fisica I*, A.A. 2001/2002
- E. Perucca, *Fisica generale e sperimentale*, UTET
- F. Tyler, *A laboratory manual of physics*, E. Arnould
- M. Loreti, *Teoria degli errori e fondamenti di statistica*, Decibel
- R. Ricamo, *Guida alle sperimentazioni di fisica vol. I*, Casa editrice ambrosiana

§ Indice

Introduzione teorica e descrittiva

Descrizione dell'apparato	pag. 1
Scopo dell'esperienza	pag. 1
Descrizione teorica dell'esperienza	pag. 1
Descrizione pratica dell'esperienza	pag. 4

Dati sperimentali e loro elaborazione

Dati sperimentali	pag. 5
Calcolo di G_{μ}	pag. 7
Propagazione dell'errore massimo assoluto a priori	pag. 7
Covarianza	pag. 8
Propagazione dell'errore standard	pag. 8
Risultati ottenuti	pag. 9
Curva di massima verosimiglianza	pag. 9
Conclusione	pag. 10
Bibliografia	pag. 10