UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI CATANIA
Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di Laurea Specialistica in Fisica
Fisica dei sistemi a bassa dimensionalità

PROPRIETÀ OTTICHE DEI SUPER-RETICOLI

dott. Emanuele Francesco Pecora
matricola n.

Docente:

Indice

In copertina: Spettri di emissione in falsi colori di laser a cascata quantica realizzati con lo stesso materiale al variare dei parametri costruttivi; si dimostra l'ampia regione di frequenze (3.4 - 17 μm) in cui si ha l'emissione [1]. Ulteriori informazioni a pag. 18, fig. 12.

1 Introduzione

I super-reticoli sono un particolare tipo di dispositivi realizzati alternando strati di due differenti semiconduttori aventi una diversa band-gap con lo scopo di controllare le proprietà dei portatori di carica. Furono proprosti teoricamente per la prima volta nel 1970 da Esaki e Tsu [2] in un articolo in cui studiavano le proprietà di un potenziale periodico unidimensionale; solo dopo qualche anno sono stati realizzati sperimentalmente. Oggi sono alla base di molti dispositivi sia elettronici che optoelettronici e sono un risultato di quella scienza che prende il nome di *band-gap engineering*.
Sappiamo che ogni semiconduttore è caratterizzato da una propria struttura a bande, identificabile attraverso le posizioni del livello di Fermi, del top della banda di valenza e del bottom della banda di conduzione. Quando mettiamo insieme due semiconduttori aventi una diversa struttura a bande, il raggiungimento dell'equilibrio termodinamico impone che nella struttura si abbia un solo livello di Fermi. Questa condizione ha come immediata conseguenza che le bande dei due materiali sono costrette a "muoversi" fino a raggiungere una nuova configurazione di equilibrio, ovvero un nuovo allineamento che può avvenire in tre diverse configurazioni (cfr. fig. 1).
In tutti i casi lo scopo della creazione di queste strutture è quello di realizzare una buca di potenziale per elettroni, lacune od entrambi i portatori contemporaneamente, così da poterne controllare e modificare a piacimento le proprietà. Dal punto di vista teorico lo studio di particelle all'interno di una buca di potenziale è un problema tipico della meccanica quantistica, studiato attraverso la risoluzione della equazione di Schrödinger relativa [4]. In queste strutture la dimensione tipica della singola buca è di circa 10 nm, ovvero circa 40 strati atomici. Al diminuire delle dimensioni della barriera tra due buche, vi è una probabilità sempre

Figura 1: Possibili configurazioni di allineamento delle bande di energia di semiconduttori differenti: a) configurazione accavallata in cui la gap di un semiconduttore è totalmente contenuta all'interno della gap dell'altro semiconduttore, configurazione tipica della struttura $AlGaAs/GaAs$; b) configurazione sfalsata, tipica dell'interfaccia $InP/InSb$; c) configurazione con rottura delle bande, che si trova ad esempio in $InAs/GaSb$ [3].

maggiore di penetrazione delle funzioni d'onda dei portatori nelle buche adiacenti. Questo overlap delle funzioni d'onda genera come vedremo la formazione di minibande che si aggiungono alla struttura a bande tipica del materiale in questione. Dunque la distinzione tra un super-reticolo e una serie di buche quantistiche risiede solo nella spaziatura tra le singole buche. Un ruolo fondamentale nel funzionamento di questi dispositivi è quello giocato poi dall'applicazione di potenziali elettrici esterni [5].
Le linee di ricerca riguardanti i super-reticoli sono molteplici; in questa tesina ho puntato l'attenzione solo su alcuni particolari aspetti: dopo aver accennato ad alcune proprietà generali di fondamentale importanza, come la creazione delle minibande e le principali proprietà di trasporto di questi sistemi, presenterò alcuni risultati noti in letteratura e riguardanti le proprietà ottiche di questi sistemi, concentrandomi su uno dei più importanti dispositivi optoelettronici degli ultimi anni, e cioè il laser a cascata quantica, e sui super-reticoli ottici.

2 Proprietà generali dei super-reticoli

2.1 Creazione delle mini-bande

I super-reticoli sono comunemente indicati anche con il nome di cristalli artificiali. Infatti così come in un cristallo la struttura regolare degli atomi (ovvero un potenziale periodico) genera le bande di energia e le gap energetiche, i super-reticoli sono una struttura ordinata di quantum well, ovvero di atomi artificiali [6], in cui vi è una interazione cooperativa tra i singoli livelli energetici, con l'effetto che un singolo elettrone non può più essere considerato localizzato in una particolare well, ma delocalizzato su tutto il sistema. Poichè avendo n quantum well, ovvero n livelli tutti alla stessa energia, per il principio di esclusione di Pauli non posso avere n livelli degeneri, automaticamente si ha la formazione di una minibanda (o sub-banda) energetica che è contenuta all'interno della banda di conduzione del materiale, e di una mini-gap che si aggiunge alla gap propria del materiale. La novità fisica di queste strutture è rappresentata dal fatto che abbiamo creato artificialmente un cristallo il cui passo reticolare è dettato dalla spaziatura delle well, ovvero può essere stabilito in fase di progettazione del dispositivo, e tipicamente è $10 \div 20$ volte più grande del passo reticolare di un tipico cristallo reale; dunque tutte le grandezze andranno scalate di un pari fattore, e ad esempio avremo minigap dell'ordine delle decine di meV.

Rappresentiamo un super-reticolo 1D come una serie di N barriere di potenziale, per semplicità tutte uguali, e poste la prima ad $x = 0$, la seconda ad $x = d$, la terza ad $x = 2d$, l'ultima ad $x = (N-1)d$. Il sistema può essere descritto da un potenziale periodico

$$V(x) = V(x + nd) = V_1 \left[\cos \frac{2\pi x}{d} - 1 \right], \tag{1}$$

Figura 2: In alto, rappresentazione schematica di un tipico dispositivo basato su super-reticolo: w è lo spessore fisico del dispositivo, x è la direzione di crescita, in cui si osserva l'alternarsi di strati di $Ga_{0.7}Al_{0.3}$ (avente una gap indicata con E_{G1}) di altezza b e $GaAs$ (la cui gap è indicata con $E_{G2} < E_{G1}$) di altezza a. m_1 ed m_2 sono le masse efficaci degli elettroni dei due materiali. Con ΔE_C è indicato il band-offset relativo alla banda di conduzione, e che la trasforma in una buca di potenziale per elettroni. In basso è graficata la banda di conduzione di questa struttura, che in condizioni di equilibrio appare come una serie di n buche di potenziale in cui gli elettroni sono costretti a muoversi [7].

Figura 3: a) Rappresentazione della struttura a bande di un cristallo su cui è costruito un super-reticolo; b) struttura a bande in funzione dei parametri ridotti η e $\beta = \frac{k_x}{k_d}$ del super-reticolo. Le zone ombreggiate rappresentano le regioni proibite, le zone non ombreggiate le regioni permesse.

essendo d appunto la distanza tra due barriere. A titolo esemplificativo in fig. 2 è riportata la rappresentazione schematica e l'andamento della banda di conduzione di un tipico super-reticolo, realizzato alternando strati di $GaAs$ con strati di $Ga_{0.7}Al_{0.3}$.

Se consideriamo la struttura a bande del cristallo ospite, possiamo suddividere la sua prima zona di Brillouin in minizone di larghezza $\frac{\pi}{d}$ (vd. fig. 3a). Ci interessiamo solo alla prima minizona, in cui certamente è possibile approssimare la relazione di dispersione con una parabola. Per semplicità definiamo due parametri adimensionati

$$\eta = \frac{E - V_1}{E_0} \qquad\qquad \gamma = \frac{V_1}{E_0}$$

essendo $E_0 = \frac{\hbar k_d^2}{2m^*}$ con m^* la massa efficace dei portatori studiati. L'equazione di Schrödinger per un sistema di questo tipo ha la forma dell'equazione di Mathieu, risolta da Slater, e in fig. 3b ne vengono presentati i risultati per il nostro problema.
Il concetto fondamentale è che per grandi valori di γ ogni portatore con la sua massa efficace interagisce con il super-reticolo e genera un set di livelli permessi che rappresentano una vera e propria banda energetica.

2.2 Proprietà di trasporto

E' noto che particelle in un potenziale cristallino perfettamente periodico sono descritte da una funzione d'onda di Bloch che rappresenta uno stato stazionario. Ai fini delle proprietà di trasporto ciò vuol dire che non è possibile avere conduzione in questo sistema ideale: le particelle incontrano una resistenza infinita. I fenomeni di trasporto sono basati piuttosto sulla possibilità che gli elettroni (o le lacune) possano, se soggette ad un opportuno campo di forze, interagire ed urtare modificando il loro stato di Bloch. Da un punto di vista classico avendo N particelle che urtano tra loro in modo casuale, l'effetto medio di questi urti è in generale nullo, tranne nella direzione privilegiata dal campo di forza, su cui si osserva una drift velocity.
Questo discorso va leggermente modificato nel momento in cui studiamo le proprietà di trasporto di un sistema mesoscopico. In questo caso una teoria molto utilizzata è quella di Landauer, che interpreta il trasporto come trasmittanza, ovvero introduce una matrice di trasmittanza (o equivalentemente una matrice di scattering) che indica la probabilità che le particelle riescano ad attraversare una certa regione in cui è presente ad esempio un gradino di potenziale.
In questa tesina non verrà presentata la teoria di Landauer (per una trattazione approfondita si vedano ad es. [6, 8, 9, 10] e riferimenti all'in-

terno) ma solo due importanti risultati che si possono ottenere con essa. Va precisato che in tutti i casi si prenderanno in esame solamente sistemi mesoscopici rispetto alle ampiezze e non rispetto alla fase, il che implica che nella struttura in esame avvengano sempre processi di tunneling coerente.

2.2.1 Tunneling risonante

Per comprendere il meccanismo che sta alla base del tunneling risonante è possibile restringere l'attenzione ad un sistema formato in sostanza da una doppia barriera di potenziale (dunque con al centro una buca di larghezza a) e due serbatoi di elettroni a destra e sinistra [8]. Indichiamo con

$$T_L = |t_L|^2, \qquad t_L = |t_L|e^{i\rho_L}$$
$$T_R = |t_R|^2, \qquad t_R = |t_R|e^{i\rho_R}$$

rispettivamente i coefficienti di trasmissione della barriera di destra e di sinistra. Assumendo per semplicità che le due barriere siano molto opache, ovvero che risulti $T_L, T_R << 1$, si può calcolare in modo semplice che il coefficiente di trasmissione per il sistema vale:

$$T \sim T_{pk} \left[1 + \frac{16}{(T_L + T_R)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right]^{-1} \tag{2}$$

essendo

$$\phi = 2ka + \rho_L + \rho_R$$
$$T_{pk} \sim \frac{4T_L T_R}{(T_L + T_R)^2}$$

La condizione di risonanza si ha per $\phi = 2n\pi$, $n \in \mathbb{N}$ e questa è la condizione in cui il coefficiente di trasmissione assume il suo valore massimo;

corrisponderà ad un certo valore di energia E_{pk} degli elettroni incidenti. Studiando l'andamento della $T(E)$ nelle vicinanze della risonanza (ponendo $\phi = 2n\pi + \delta\phi$) si trova che

$$T(E) = \frac{T_{pk}}{1 + \left(\frac{E - E_{pk}}{\frac{1}{2}\Gamma}\right)^2} \tag{3}$$

cioè il coefficiente di trasmissione ha un andamento lorentziano centrato su E_{pk} e con larghezza

$$\Gamma = \frac{\hbar v}{2a}\left(T_L + T_R\right)$$

il cui inverso è legato alla frequenza di uscita di particelle dalla barriera. In una multi quantum well abbiamo una serie di barriere di potenziale, per cui l'estensione del meccansimo di tunneling risonante è immediata: si avrà passaggio di corrente solo se applicando un opportuno campo elettrico si ottiene la condizione di risonanza per tutte le singole barriere.

2.2.2 Resistenza differenziale negativa

Da un punto di vista pratico siamo interessati a conoscere non tanto il coefficiente di trasmissione, quanto parametri direttamente osservabili sperimentalmente, come la conduttanza del sistema. Riferendoci ancora per semplicità al sistema di una doppia barriera di potenziale, il contributo alla corrente che attraversa il dispositivo in una direzione vale

$$i = \frac{2e}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} T(E)dE$$

Limitiamoci alla condizione di risonanza, ovvero trascuriamo il coefficiente $T(E)$ e scriviamo le equazioni del moto per i portatori nella nostra struttura:

$$\hbar\dot{k_x} = e\mathscr{E}$$
$$v_x = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E_x}{\partial k_x}$$

Figura 4: Grafico della funzione (5) che rappresenta il fattore di ampiezza della media della velocità di deriva, da cui si evidenzia l'esistenza di una regione a resistenza differenziale negativa.

avendo definito con il simbolo $\mathscr{E}$ il campo elettrico applicato, e con E l'energia dei portatori. Ciò che si misura sperimentalmente è la media della velocità di deriva, che, definito τ il tempo caratteristico di scattering (ovviamente tale da rimanere nell'ambito dei sistemi mesoscopici), si scrive come:

$$v_d = \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau}} dv_x = e\mathscr{E}\frac{1}{\hbar^2}\int_0^\infty \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial k_x^2}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} dt \doteq f(\xi)\left[\frac{\hbar k_d}{m(0)}\right] \qquad (4)$$

Per poter risolvere questo integrale è necessario sostituire la reale forma della relazione di dispersione per i portatori; ricordato che stiamo applicando alla nostra struttura un campo elettrico e che quindi siamo lontani dall'equilibrio termodinamico, è utile scegliere una relazione di dispersione costruita come l'unione di due parabole di opposta curvatura, unite nel punto di flesso. In questo caso l'integrale è risolubile per via analitica e si ottiene:

$$f(\xi) = \xi\left[1 + \frac{2k_d}{k_d - k_i}\frac{\sinh\left(\frac{k_i}{k_d\xi}\right)}{e^{\frac{2}{\xi}} - 1} - \frac{k_d}{k_d - k_i}e^{-\frac{k_i}{k_d\xi}}\right] \qquad (5)$$

Graficando questa curva (vd. fig. 4) fissato il valore del rapporto $\frac{k_i}{k_d}$, si trova l'esistenza di una regione a resistenza negativa che si ottiene per alti valori di campo elettrico applicato. Si tratta di una situazione paradossale in cui la corrente diminuisce all'aumentare della tensione.

E' chiaro che nelle proprietà di trasporto un ruolo fondamentale è svolto dal tempo caratteristico di scattering dei portatori nel cristallo, e in particolare per osservare i fenomeni fin qui descritti è necessario lavorare con cristalli molto puri in cui questo parametro sia molto grande. Ma al crescere di τ, nel limite di particelle non interagenti, si può osservare anche un'altro fenomeno, in cui l'elettrone (o la lacuna) soggetto al campo elettrico, e dunque accelerato, si muove all'interno della mini-zona di Brillouin, e poichè non interagisce con gli altri portatori o con il reticolo, non termalizza; giunto ai bordi della mini-zona viene riflesso sul bordo opposto a causa della periodicità del reticolo reciproco. Ciò dà luogo alle cosiddette oscillazioni di Bloch, che secondo il nostro modello si hanno quando $\frac{e\mathscr{E}\tau d}{\hbar} > 2\pi$, un valore molto maggiore di quello necessario per avere resistenza negativa. Il limite sperimentale per il mantenimento nella struttura di campi elettrici così grandi è la rottura del dispositivo per effetto Zener o per valanga.

Ricapitoliamo in modo qualitativo quanto ricavato a proposito delle proprietà di trasporto in un super-reticolo: consideriamo il nostro cristallo artificiale, con le sue buche di potenziale, ognuna delle quali ha i suoi livelli energetici. In questa situazione gli elettroni possono muoversi per effetto tunnel da una buca all'altra, ma essendo la struttura perfettamente simmetrica alla fine non si ha alcun passaggio di corrente. Applichiamo ora un campo elettrico di piccola intensità alla struttura: sappiamo che ciò porta la struttura in una situazione fuori dall'equilibrio termodinamico, ovvero si rompe il livello di Fermi e si assiste al piegamento delle bande che, se supponiamo che il mezzo sia perfettamente omogeneo, possiamo assumere avvenga in modo lineare. In questa condizione i livelli energetici permessi nelle varie buche non sono più allineati, e la struttura favorisce il cammino degli elettroni nella direzione di applicazione del campo elettrico, mentre ne impedisce il fluire nella direzione opposta. Abbiamo dunque un passaggio netto di corrente attraverso il dispositivo.

Figura 5: A partire dall'alto: super-reticolo nella situazione di equilibrio in cui la struttura è perfettamente simmetrica; applicazione di un piccolo campo elettrico che piega le bande energetiche provocando un passaggio di corrente proporzionale alla tensione applicata; all'aumentare del campo elettrico si perde l'allineamento tra le sottobande e si entra nella regione di resistenza differenziale negativa; per forti tensioni applicate è possibile avere l'allineamento tra due sottobande consecutive e dunque un nuovo aumento della corrente nella struttura. In questo grafico con F si indica il campo elettrico applicato $\mathscr{E}$.

L'andamento di questa corrente dipende esclusivamente dall'allineamento dei vari livelli energetici, ovvero dalla nostra $T(E)$. Per piccoli valori di tensione applicata le sottobande rimangono allineate e la corrente aumenta proporzionalmente con il campo elettrico applicato. All'aumentare di questo invece si inizia a perdere l'allineamento tra le varie sottobande, cosa che implica naturalmente la diminuzione della corrente che scorre nella struttura, nonostante la tensione applicata continui ad aumentare: siamo entrati nella regione di resistenza differenziale negativa. Infine, all'aumentare ulteriore della tensione applicata, poichè i livelli permessi in ogni singola buca possono essere più di uno, si può avere l'allineamento tra due bande adiacenti, e dunque un nuovo aumento della corrente. Le varie situazioni qui rappresentate sono ben visualizzate nel grafico riportato in fig. 5.

3 Proprietà ottiche dei super-reticoli

3.1 Tunneling risonante assistito da fotoni

L'interazione tra un sistema a bassa dimensionalità e un campo elettrico esterno dipendente dal tempo porta in molti casi a meccanismi comple-

tamente nuovi per il trasporto elettronico. In particolare qui presento un meccansimo noto come PAT (*photon-assisted tunneling*), osservato per la prima volta da Dayem e Martin in complesse strutture superconduttore/isolante/superconduttore, ma che è stato poi osservato anche in super-reticoli, e che può essere spiegato in modo semplice ma completo con in modello proposto da Tien e Gordon [11]. L'idea vincente di questo modello è che l'applicazione di un potenziale dipendente dal tempo sul nostro sistema possa indurre eventi di tunneling inelastico con lo scambio di quanti di energia, cioè fotoni, tra gli elettroni e il campo stesso. Il potenziale può essere quello generato da un campo elettrico oppure ad esempio quello generato da una radiazione e. m. che è presente nella struttura in seguito all'emissione spontanea che può avvenire nel decadimento da un livello eccitato di una buca. In generale dal punto di vista sperimentale uno studio di questi fenomeni risulta complesso in quanto richiede un campo elettrico contemporaneamente ad alta frequenza ed intenso, e sorgenti di questo tipo non sono comuni.
Studiamo innanzitutto il modello teorico proposto da Tien e Gordon [12]: consideriamo gli elettroni della struttura soggetti, oltre al campo cristallino, ad un potenziale del tipo $V_{ac} \cos \omega t$, potenziale dipendente dal tempo ma costante nello spazio, e che dunque non ha la possibilità di modificare la distribuzione spaziale delle funzioni d'onda degli elettroni. Aggiungendo questo termine nell'hamiltoniana che descrive gli elettroni e risolvendo l'equazione di Schrödinger relativa si trova che le funzioni d'onda elettroniche possono essere espresse nella forma

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0(\vec{r}, t) \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m \left(\frac{eV_{ac}}{\hbar\omega} \right) e^{-im\omega t}$$

essendo $\psi_0(\vec{r}, t)$ la funzione d'onda elettronica senza il potenziale esterno, J_m la funzione di Bessel di m-esimo ordine. Studiando questa funzione d'onda si vede che può avvenire un processo di tunneling da uno stato

Figura 6: Coefficiente di trasmissione in funzione dell'energia per una doppia barriera di potenziale calcolato nel caso in cui al sistema sia applicata una tensione dipendente dal tempo con frequenza pari a 13,6 meV.

caratterizzato da energia E ad uno caratterizzato da energia $E \pm m\hbar\omega$, cioè che differisce da quello iniziale per l'assorbimento/emissione di m quanti di energia dal campo esterno che stiamo applicando. E' possibile calcolare a partire da questi risultati il coefficiente di trasmissione che si ottiene in questo sistema e si trova (vd. fig. 6) una curva che è la tipica lorentziana, modificata per la comparsa di picchi satelliti esattamente alle energie $E_{pk} \pm \hbar\omega$, $E_{pk} \pm 2\hbar\omega$... a seconda che sia avvenuto il processo di tunneling assistito dall'assorbimento (determinazione +) o emissione (determinazione -) di uno o due fotoni. Transizioni assistite da un numero maggiore di fotoni sono ovviamente sempre meno intense, dato che la probabilità che il processo avvenga è proporzionale a J_m^2. Il modello di Tien e Gordon predice pure che il contributo di questi processi è significativo quando la funzione di Bessel relativa assume il suo valore massimo, ovvero per $\frac{eV_{ac}}{\hbar\omega} \rightarrow 1$.
Come detto questo modello non è stato sviluppato per i super-reticoli: per poterlo applicare con successo anche a questi sistemi si può [13] modificare in modo empirico il risultato aggiungendo la densità degli stati propria del super-reticolo $\rho(E)$ e la funzione di occupazione termodinamica $f(E)$, per cui la densità di corrente calcolata si scrive nella forma:

$$
\begin{aligned}
J \propto \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m^2 \left(\frac{eV_{ac}}{\hbar\omega}\right) \int \rho(E) f(E) \cdot \\
\cdot \left[\rho\left(E - eV_{ac} - m\hbar\omega\right) - \rho\left(E + eV_{ac} - m\hbar\omega\right)\right] dE.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Figura 7: Rappresentazione schematica dei livelli energetici quasi stazionari di una buna di potenziale e dei livelli energetici introdotti dall'applicazione di un campo elettrico ad alta frequenza ed associati a processi di assorbimento o emissione di fotoni. [14]

Figura 8: a): caratteristica i/V misurata senza e con una radiazione laser a 1.30 THz a tre diverse potenze; b) conduttanza differenziale - che evidenzia l'altezza degli step presenti nella caratteristica misurata - in funzione della potenza del laser.

Da un punto di vista pratico allora l'applicazione di un campo elettrico ad alta frequenza in un super-reticolo ha l'effetto di introdurre nuovi canali di conduzione dovuti a dei livelli energetici nella buca che possiamo definire virtuali ma che ai fini della conduzione si comportano esattamente come i livelli reali (vd. fig. 7).
Sperimentalmente uno studio di questi fenomeni è stato fatto [13] misurando la caratteristica i/V del sistema sia in condizioni normali sia inviando su di esso una radiazione laser alla frequenza di 1.30 THz (5.38 meV) a tre diverse potenze. La curva ottenuta è riportata in fig. 8: in assenza della radiazione laser si osserva una prima regione, che si evidenzia a basse tensioni, in cui la corrente ha un andamento ohmico, e che si riconduce al passaggio di corrente dal ground state di una buca al ground state della successiva. L'allineamento totale tra i due livelli implica la saturazione della conduzione, e quindi un plateau nella ca-

ratteristica, seguito subito dopo dalla regione a resistenza differenziale negativa. Successivamente si osservano delle oscillazioni, legate all'allineamento del ground state di una buca con uno degli stati eccitati della buca successiva: per ognuno di questi allineamenti si ha prima un plateau della corrente e poi la regione a resistenza differenziale negativa.
La situazione cambia quando al sistema si invia la radiazione laser: si osserva innanzitutto una soppressione della corrente a piccoli valori di tensione, fenomeno questo che prende il nome di localizzazione dinamica dei portatori e che in questa sede non verrà studiato. Studiamo invece cosa accade all'aumentare della tensione, quando si osserva un nuovo plateau che si apre ad un valore tale di tensione da poterlo attribuire con certezza al fenomeno di tunneling assistito dall'emissione stimolata di un fotone. Per osservare il processo assistito da due o tre fotoni è necessario aumentare la potenza della radiazione laser incidente. La fig. 8b mostra la conduttanza differenziale che mette in evidenza la posizione dei plateau e permette di confrontare i dati sperimentali con il modello di Tien e Gordon modificato - cfr. eq. (6): l'accordo è soddisfacente.

3.2 Emissione inter-minibanda con eccitazione per tunneling risonante

Già pochi anni dopo il primo articolo sui super-reticoli fu fatta la prima proposta per lo studio del problema della generazione e amplificazione di luce in questi sistemi. In particolare le transizioni tra i livelli energetici del super-reticolo hanno subito attratto molto interesse perchè tipicamente ricadono nella regione dell'IR, regione di rilevante interesse tecnologico. Altra novità è quella di poter raggiungere l'inversione di popolazione non in seguito a riscaldamento ohmico (processo che non permette di avere buoni guadagni) ma sfruttando proprio il tunneling risonante.
Il primo passo verso la realizzazione di un dispositivo come quello idea-

Figura 9: Caratteristica tensione-corrente di un super-reticolo alla temperatura di 4,2 K. Nel grafico sono indicati i livelli energetici tra cui avviene il processo di tunneling. Nell'inserto è rappresentata in forma schematica la banda di conduzione di un super-reticolo e sono evidenziati i processi di trasporto e di decadimento.

to consiste nello studio dei livelli energetici permessi nel super-reticolo [15]. Un'analisi spettroscopica di questo tipo si fa in modo semplice tramite misure di caratteristiche i/V come quelle riportate in figura 9. Sono evidenti le regioni a resistenza differenziale negativa, ognuna delle quali corrisponde alla rottura della risonanza tra due livelli energetici consecutivi, e le successive regioni in cui la corrente aumenta, che corrispondono all'allineamento con il livello energetico successivo. Questa misura permette di identificare i livelli energetici attraverso i quali avviene il tunneling, e quindi di risalire al livello energetico che può essere popolato, fissata la tensione applicata.

Effettuata questa misura si può studiare la luce emessa da questi super-reticoli (vd. fig. 10). La prima cosa da osservare è che le energie a cui si ha l'emissione (11, 18 e 25 meV) corrispondono esattamente alle energie calcolate per le transizioni tra i livelli delle minibande (rispettivamente 11.4, 18.9 e 26.4 meV). Questa è una conferma del fatto che si sta osservando una emissione inter-minibanda. Altra osservazione importante è che le altezze dei picchi di luminescenza dipendono dalla tensione applicata, e in particolare si osservano solo i picchi che coinvolgono livelli che sono accessibili per quella particolare tensione.

Circa invece l'efficienza di questo processo, vanno studiati in dettaglio i due fenomeni di decadimento che sono in competizione: l'emissione radia-

Figura 10: Segnale di luminescenza al variare della tensione applicata sul super-reticolo. Accanto ad ogni picco è evidenziata quale transizione è coinvolta. Il sistema di analisi utilizzato può essere schematizzato nel modo seguente: la radiazione emessa viene guidata fino ad un bolometro operante alla temperatura di 1,5 K; subito prima è presente una slab di $InSb$ su cui è applicato un campo magnetico, che varia la frequenza di rivoluzione ciclotronica e dunque costituisce un filtro in energia per la radiazione emessa.

tiva e l'emissione non radiativa che coinvolge anche un fonone riducendo in modo drammatico l'efficienza quantica del sistema. Si può vedere in particolare che un processo molto veloce è quello che coinvolge i fononi ottici dei super-reticoli (questo processo ha una vita media dell'ordine dei ps, mentre l'emissione radiativa ha una vita media dell'ordine dei μs): ecco perchè le transizioni che avvengono ad energie non accessibili per i fononi ottici sono quelle per le quali si ha l'efficienza più alta possibile.
Infine a partire dall'area dei picchi di luminescenza si può risalire alla popolazione dei vari livelli energetici. Questa misura è fondamentale per sapere se nel sistema si è raggiunta la condizione di inversione di popolazione, requisito essenziale se si vuole avere amplificazione e poi emissione laser in queste strutture.

3.3 Il laser a cascata quantica

Emissione laser da un super-reticolo fu osservata per la prima volta da Jerome Faist, Federico Capasso, Deborah Sivco, Carlo Sirtori, Albert Hutchinson e Alfred Cho nel laboratori Bell nel 1994, quasi trent'anni dopo dal primo lavoro su questi sistemi. Il laser a cascata quantica è un eccellente esempio di come la cosiddetta *quantum engineering* possa es-

Figura 11: Confronto in maniera pittorica tra un laser a semiconduttore convenzionale e un laser a cascata quantica. [16]

Figura 12: Spettri di emissione in falsi colori di laser a cascata quantica realizzati con lo stesso materiale al variare dei parametri costruttivi [1].

sere utilizzata per progettare nuovi materiali (*materials by design*) aventi la proprietà di emettere di luce.

Il laser a cascata quantica può essere visto come una *electronic waterfall*; è infatti un dispositivo unipolare, che utilizza cioè un solo tipo di portatori (tipicamente gli elettroni) che attraversano una serie di buche di potenziale identiche, emettendo un fotone ad ogni step. Sono due le carattersitiche peculiari di questi dispositivi (vd. fig. 11): la lunghezza d'onda di emissione è determinata essenzialmente dal confinamento quantico, ovvero dallo spessore degli strati della regione attiva e non dalla band gap del materiale usato. In altre parole fissato un materiale, al variare dei parametri di progettazione è possibile ottenere emissioni in un ampio spettro (ad esempio è stato dimostrata emissione con continuità nel range 3.4 - 17 μm utilizzando la struttura $AlInAs/GaInAs$ - vd. fig. 12); in secondo luogo mentre in un laser convenzionale ogni coppia elettrone-lacuna, anche nel caso ideale, può generare al massimo un solo fotone, in un laser a cascata quantica ogni elettrone che attraversa la struttura genera fino a n fotoni, essendo n il numero di buche quantiche

Figura 13: Diagramma energetico della banda di conduzione di un laser a cascata quantica: sono evidenziate le bande energetiche e le regioni attive [18].

di cui è composta la struttura (tipicamente $20 \div 75$).
Può essere utile accennare alla struttura reale del primo laser a cascata quantica [17]: in fig. 13 ne è riportata la banda di conduzione, costituita in totale da 25 buche di potenziale operanti sotto l'applicazione di un campo elettrico pari a $1{,}0 \cdot 10^5 \ Vcm^{-1}$. Gli elettroni sono iniettati nella struttura attraverso una barriera spessa 4.5 nm di $AlInAs$ nella banda corrispondente al livello energetico $n = 3$ della regione attiva, portando automaticamente la struttura in inversione di popolazione. Da qui tramite un processo di tunneling assistito dall'emissione di un fotone, migrano verso la banda $n = 2$ della buca di $GaInAs$ successiva, che chiaramente si troverà solo con la popolazione dell'equilibrio termodinamico. Il processo di tunnel avviene attraversando una barriera trapezoidale di $AlInAs$ molto piccola, così da assicurare un processo veloce ($\sim 0.2 \ ps$), competitivo con i processi di rilassamento fononico che avvengono tramite transizioni inter-minibanda, e che sono caratterizati in queste condizioni di lavoro da un tempo caratteristico di circa 4.3 ps. A questo punto la struttura è progettata per avere la minibande caratterizzate da $n = 2$ e $n = 1$ fortemente sovrapposte, in modo che sia fortemente favorito il processo di rilassamento inelastico con l'emissione di un fonone ottico. Infine l'elettrone, giunto ormai nella sottobanda $n = 1$, può facilmente tunnelare verso il livello $n = 3$ adiacente, garantendo sia l'inversione di popolazione che l'efficienza del dispositivo. Ovviamente la regione attiva in cui avvengono i processi ora descritti è posta tra due cladding

di $AlInAs$ che garantiscono il confinamento ottico di una guida d'onda, mentre la cavità risonante è ottenuta tramite un tipico Bragg reflector.
Il dispositivo qui descritto fu progettato per una emissione a $\lambda = 4.3\ \mu m$, con una potenza dell'ordine delle decine di mW e funzionante alla temperatura di 100 K. Ovviamente una volta compreso il meccansimo fisico alla base, si è cercato di perfezionarne le prestazioni: nello stesso articolo [17] in cui è presentato il primo laser ne vengono subito presentate delle versioni più efficienti. La prima sfruttando transizioni verticali (e non più processi di tunneling risonante assistito da fotone) tra la banda $n = 3$ e $n = 2$ ottiene i risultati di ridurre la FWHM della riga laser ottenuta e di abbassare la soglia dell'azione laser, il che significa avere emissioni continue a potenze molto maggiori. Ulteriori miglioramenti hanno permesso poi di ottenere l'azione laser anche a temperatura ambiente.
Il passo successivo è consistito nella creazione, sempre sfruttando le proprietà dei super-reticoli, di un laser funzionante a più lunghezze d'onda contemporaneamente: si tratta di un risultato impensabile per i laser convenzionali a semiconduttore, ma dalle importanti applicazioni ad esempio nella spettroscopia. Un interessante riferimento in cui trovare storia, proprietà e applizazioni dei laser a cascata quantica è indicato in [19].

4 I super-reticoli ottici

Il modello elaborato da Tsu ed Esaki è valido nel limite di basse concentrazioni di impurezze, condizione per la quale il libero cammino medio degli elettroni è più grande della spaziatura tra due barriere di potenziale, per cui è lecito supporre che vi sia un'overlap tra le funzioni d'onda dei portatori nelle singole buche. E' possibile fare una facile valutazione qualitativa del tempo minimo di vita media τ dei portatori necessario per poter osservare questi effetti quanto-meccanici facendo ricorso al princi-

pio di indeterminazione di Heisenberg e imponendo che il libero cammino medio degli elettroni valga almeno tre volte la spaziatura d.
Sperimentalmente però il cristallo raggiunge la stabilità termodinamica formando dei centri di scattering che comportano delle deviazioni dal modello ideale di potenziale. Quando queste deviazioni sono notevoli, l'effetto è quello di ottenere un sistema disordinato (le minibande si suddividono in un insieme di livelli localizzati del tipo di Wannier-Stark e la banda di conduzione si rompe) in cui non è più possibile osservare gli effetti descritti.
Lo sforzo è quello di realizzare reticoli molto puri e con bassi drogaggi in modo da potersi avvicinare quanto più possibile al modello ideale. In tal senso una notevole importanza è svolta dai cosiddetti reticoli ottici [20, 21], sistemi in cui è possibile ricostruire un cristallo ideale 1D e in cui si introduce in modo controllato la possibilità di scattering tra le particelle.
Si definisce reticolo ottico una serie periodica di buche di potenziale realizzata tramite un'onda luminosa e in cui saranno confinati atomi raffreddati. Si parte da una mistura di fermioni ^{40}K e bosoni ^{87}Rb inseriti in una trappola magnetica[1]. I fermioni vengono ulteriormente raffreddati tramite evaporazione dei bosoni e portati a temperature comprese tra 300 e 400 nK. Agendo sulla rampa di evaporazione si interviene sul

[1] La trappola magnetica è una tecnica che confina gli atomi in una definita regione dello spazio realizzata tramite la trappola di Paul su atomi raffreddati con il laser cooling. Il laser cooling, sfruttando il principio di conservazione dell'impulso durante i processi di assorbimento ed emissione spontanea di fotoni da parte degli atomi, riesce ad abbassarne l'energia cinetica e dunque la temperatura fino valori dell'ordine dei μK. La trappola di Paul è un sistema che crea in una particolare regione dello spazio un campo magnetico che è nullo al centro e aumenta allontanandosi. Il campo magnetico provoca pure uno splitting Zeeman dei livelli atomici: attraverso opportuni fasci laser gli atomi sono portati nel sottolivello in cui trovano energeticamente favorevole portarsi al centro della trappola. Una trattazione più dettagliata si trova ad esempio in [22, 23, 24] e riferimenti all'interno.

Figura 14: Evoluzione della posizione del c. m. della melassa ottica: i cerchi indicano i dati riferiti ad una nuvola di soli fermioni, da cui si evince che in sostanza il centro della trappola rimane fisso; i quadrati indicano i dati sperimentali riferiti ad una melassa di fermioni e bosoni. Stavolta si osserva una corente macroscopica, e se ne può misurare il tempo di decadimento effettuando un fit tramite un esponenziale semplice.

numero finale di bosoni presenti nella mistura. Il reticolo è realizzato attraverso due laser contropropaganti e aventi polarizzazione ortogonale, e allineati, nel caso 1D, sul piano orizzontale e sull'asse minore della trappola magnetica. I laser vengono accesi durante l'evaporazione così da far raggiungere adiabaticamente al sistema l'equilibrio. Il reticolo ottico genera un potenziale cristallino della forma

$$V(x) = \frac{V_0}{2}\left[1 - \cos\left(\frac{4\pi x}{\lambda}\right)\right]$$

essendo λ la lunghezza d'onda del laser. A causa del principio di Pauli se le particelle introdotte nel reticolo ottico sono fermioniche, queste a bassa temperatura non possono interagire (tutti gli stati sono occupati e non sono disponibili stati finali) e dunque rappresentano un cristallo in cui idealmente $\tau \to \infty$. Aggiungendo in modo controllato alla melassa un certo numero di bosoni si sta introducendo la possibilità di interazioni tra le particelle. Al limite, un sistema di soli bosoni rappresenta un sistema con piena possibilità di fenomeni di scattering tra particelle.
Per studiare le proprietà di trasporto [21], la trappola magnetica è improvvisamente shiftata di un valore x_d: il potenziale armonico si comporta come una forza applicata dall'esterno e si segue la posizione del c. m. della nuvola di atomi. Come si evince dalla fig. 14, dopo una iniziale

Figura 15: Tempo di decadimento di una nuvola di fermioni in una melassa con bosoni in funzione della probabilità di collisioni, ovvero del numero di bosoni presenti nella melassa. La linea continua rappresenta un fit dei dati sperimentali secondo il modello teorico di Tsu ed Esaki.

oscillazione la nuvola di soli fermioni rimane spostata rispetto al centro della trappola: senza la possibilità di scattering i fermioni non possono modificare le popolazioni dei singoli stati. Il sistema si comporta come un isolante. Aggiungendo i bosoni alla mistura si vede che la nuvola tende rapidamente alla posizione iniziale di equilibrio, ovvero si osserva una corrente macroscopica.
A partire da una melassa di soli fermioni si studia l'andamento di τ in funzione della probabilità di collisioni (proporzionale al numero di bosoni nella melassa) e si osserva una iniziale diminuzione di τ (come previsto), mentre poi oltre un certo valore si ha una leggera risalita della curva (vd. fig 15). Ciò avviene quando il numero di bosoni supera quello dei fermioni. Il risultato da sottolineare è che abbiamo ritrovato in questo sistema il fenomeno della resistenza differenziale negativa, ed è possibile addirittura comparare questi dati sperimentali con il modello proposto da Esaki. Nei super-reticoli la resistenza differenziale negativa è una diretta conseguenza della localizzazione dei portatori nelle singole buche di potenziale; in questo esperimento non se ne modifica la localizzazione ma la probabilità di collisione, che comunque determina alla fine la possibilità di conduzione dei portatori. Fatte le dovute differenze per i diversi sistemi in analisi in particolare perchè il rate di scattering non comprende le interazioni con il reticolo e la velocità iniziale delle parti-

celle è quella osservata nella prima oscillazione della nuvola, si vede che il modello riproduce bene anche questi dati sperimentali.

Riferimenti bibliografici

[1] F. Capasso and C. Gmachl, *Quantum Cascade Laser*, `http://www.bell-labs.com/`.

[2] L. Esaki and R. Tsu, *IBM J. Res. Develop.* **14**, 61 (1970).

[3] K-N Tu, J.W. Mayer, and L.C. Feldman, *Electronic Thin Film Science* (Macmillan Publishing Co., New York, 1992).

[4] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics* (John Wiley, New York, 1977).

[5] S. Scurlock, *Computer modeling of copper indium gallium diselenide* $(Cu(In,Ga)Se_2)$ *superlattices*.

[6] G. Piccitto, appunti del corso *Fisica dei sistemi a bassa dimensionalità*, A. A. 2005/2006.

[7] C. L. Roy, *Bull. Mater. Sci.* **25**, 469 (2002).

[8] J. H. Davies, *The physics of low dimensional semiconductors* (Cambridge University Press, Cambridge, 1997).

[9] S. Datta, *Electronic transport in mesoscopic system* (Cambridge Un. Press, Cambridge, 1995).

[10] R. Landauer, *IBM Journal* **1**, 223 (1957).

[11] P. K. Tien and J. P. Gordon, *Phys. Rev.* **129**, 647 (1963).

[12] G. Platero and R. Aguado, *Photon-assisted transport in semiconductor nanostructures*.

[13] B. J. Keay, S. Zeuner, S. J. Allen Jr., K. D. Maranowski, A. C. Gossard, U. Bhattacharya, and M. J. W. Rodwell, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4102 (1995).

[14] P. S. S. Guimaraes, B. J. Keay, J. P. Kaminski, S. J. Allen Jr., P. F. Hopkins, A. C. Gossard, L. T. Florez, and J. P. Harbison, *Phys. Rev. Lett.* **70**, 3792 (1993).

[15] M. Helm, P. England, E. Colas, F. DeRosa, and S. J. Allen Jr., *Physical Review Letters* **63**, 74 (1989).

[16] Bell Laboratories, *Physical Sciences Research*, `http://www.bell-labs.com/`.

[17] F. Capasso, J. Faist, C. Sirtori, and A. Y. Cho, *Solid State Communications* **2-3**, 231 (1997).

[18] J. Faist, F. Capasso, C. Sirtori, D. L. Sivco, J. N. Baillargeon, A. L. Hutchinson, S. N. G. Chu, and A. Y. Cho, *Appl. Phys. Lett.* **68**, 3680 (1996).

[19] F. Capasso, R. Paiella, R. Martini, R. Colombelli, C. Gmachl, T. L. Myers, M. S. Taubman, R. M. Williams, C. G. Bethea, K. Unterrainer, H. Y. Hwang, D. L. Sivco, A. Y. Cho, A. M. Sergent, H. C. Liu, and E. A. Whittaker, *IEEE J. of Quantum Electronics* **38**, 511 (2002).

[20] M. Ghulinyana, Z. Gaburro, L. Pavesi, C. J. Oton, N. Capuj, R. Sapienza, C. Toninelli, P. Costantino, and D. S. Wiersmab, *Optical superlattices: where photons behave like electrons.*

[21] H. Ott, E. de Mirandes, F. Ferlaino, G. Roati, G. Modugno, and M. Inguscio, *Physical Review Letters* **92**, 16 (2004).

[22] M. Inguscio and A. Sasso, *Encyclopedia of Applied Physics - vol. 19:* Spectroscopy, Laser (VCH Publichers, Firenze, 1997).

[23] W. D. Phillips, *Rev. Mod. Phys.* **70**, 721 (1998).

[24] S. Chu and C. Wieman, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2018 (1989).

Elenco delle figure